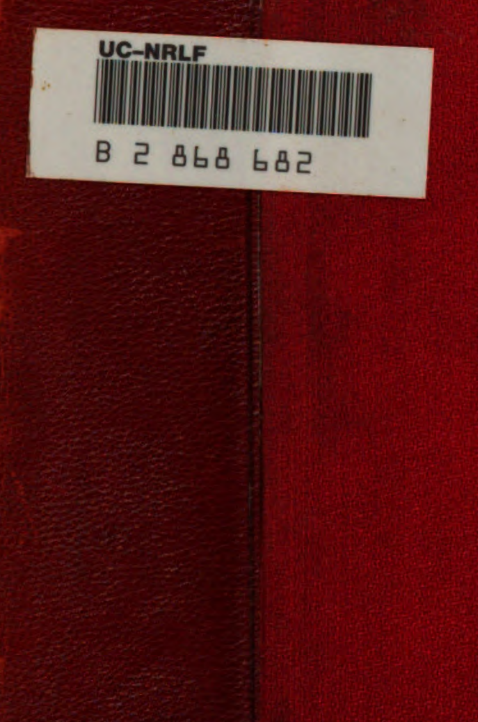
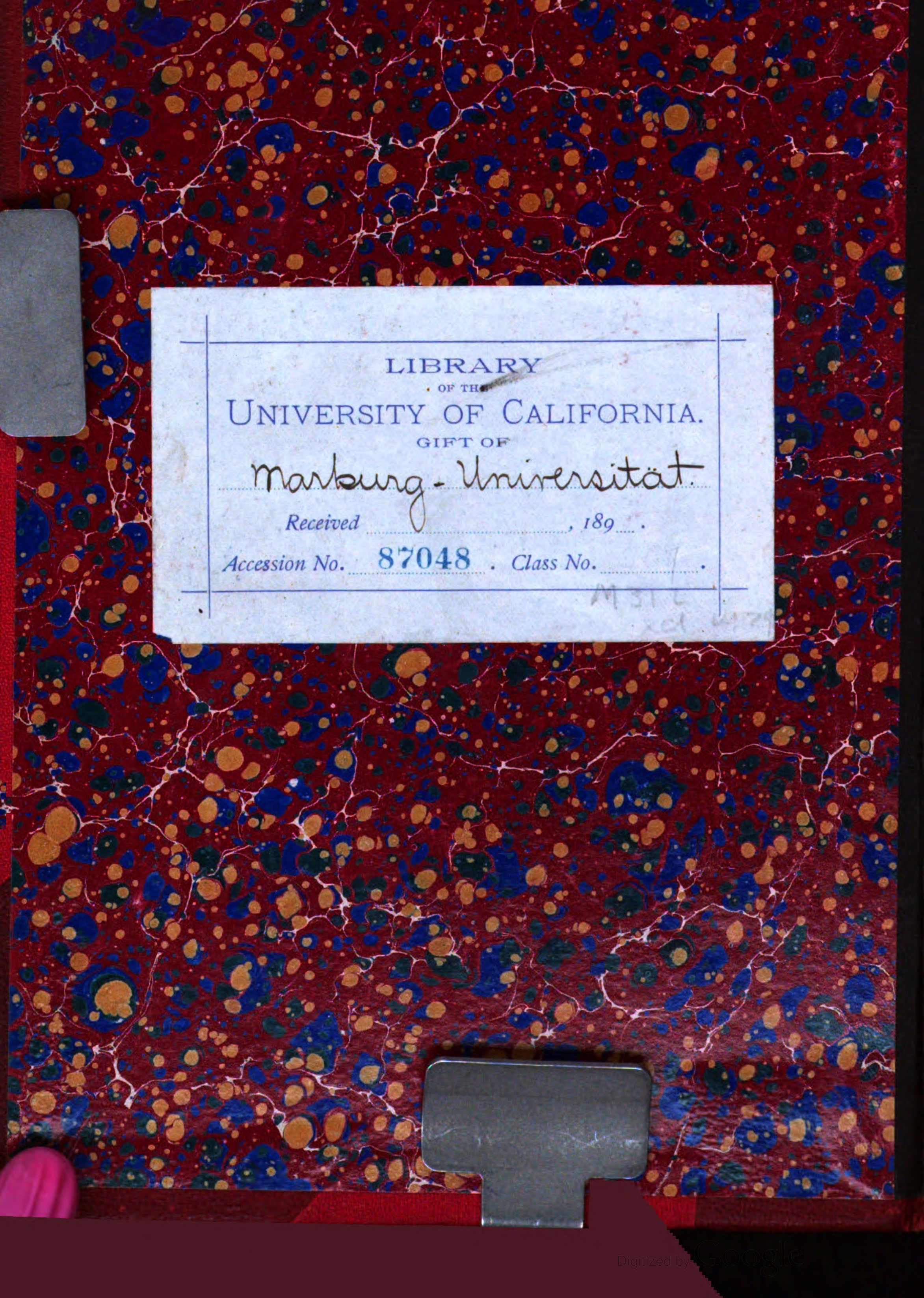
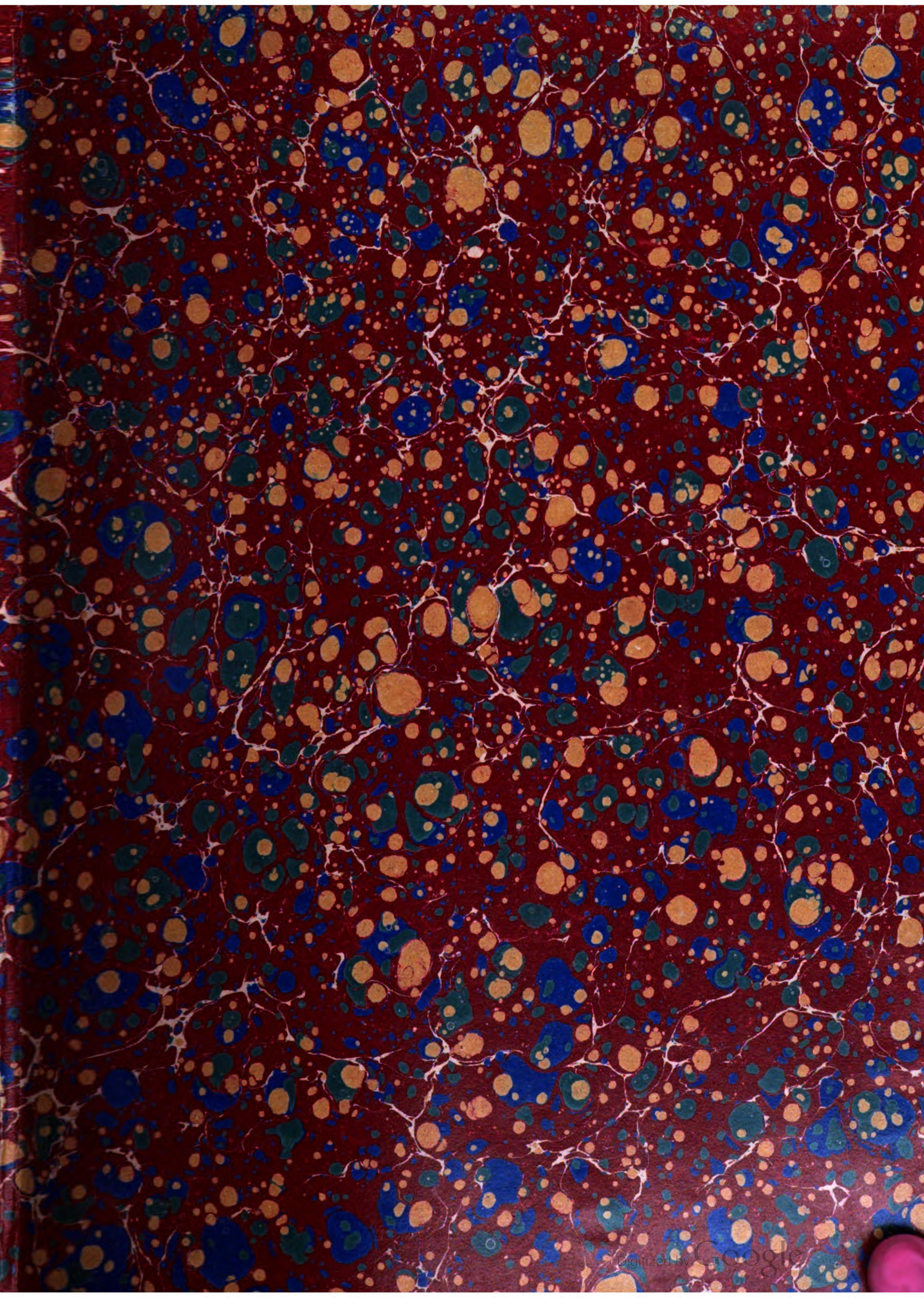





LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Marburg - Universität.
Received , 189 .
Accession No. 87048 . Class No.



4.

Über die

aus der komplexen Multiplikation

der

elliptischen Funktionen

entspringenden

algebraischen Gleichungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Fakultät

der

Universität Marburg

eingereicht

von

Georg A. W. Knoche

aus Gr. Heere, Provinz Hannover



Marburg 1892.

Als Dissertation angenommen am 26. Februar 1892.

Seinem lieben Vater

in

Dankbarkeit und Liebe

gewidmet

vom

Verfasser.

Am 27. Januar 1891 wurde von der hohen philosophischen Fakultät der Königlichen Universität zu Marburg als Preisschrift folgendes Thema gestellt:

„Die aus der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen entspringenden algebraischen Gleichungen sind nach Adjunktion einer Quadratwurzel Abelsche Gleichungen. Aus den Wurzeln dieser Gleichungen lassen sich analog den Kreisteilungsperioden gewisse Perioden bilden, welche Wurzeln Abelscher Gleichungen von niedrigerem Grade sind. Es sollen von diesen Teilgleichungen die vom zweiten und dritten Grade näher untersucht und in einer Reihe von Beispielen gebildet werden."

Diesem Umstande verdankt die nachstehende Abhandlung, die auch am 27. Januar 1892 von der hohen philosophischen Fakultät der Königlichen Universität zu Marburg gekrönt wurde, ihre Entstehung.

I.

Die Multiplikation der elliptischen Funktionen ist dadurch ermöglicht, dafs die Funktion $\varphi(nu)$ für ein ganzzahliges n dieselben Perioden ω_1 und ω_2 besitzt, wie die doppelt periodische Funktion $\varphi(u)$. Ist $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ (mit positiv imaginärem Bestandteil) variabel, so ist dieses die einzig mögliche Multiplikation. Wird aber für das Argument ω die mit positivem imaginären Bestandteil versehene Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung:

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0$$

mit negativer Determinante $B^2 - 4AC$ gesetzt, so läfst sich für diesen singulären Wert

$$\omega = \frac{-B + i\sqrt{\varDelta}}{2A}; \quad \varDelta = 4AC - B^2$$

ein komplexer, ganzzahliger Multiplikator μ so bestimmen, dafs auch $\varphi(\mu u)$ dieselben Perioden ω_1 und ω_2 besitzt. Diese Art der Multiplikation heifst deswegen die komplexe Multiplikation [1]).

Von gröfster Wichtigkeit sind nun neben dem singulären ω selbst die Werte der Modulfunktionen, namentlich der Invariante $j(\omega)$ für diesen besonderen Wert ω, da sich ergiebt, dafs diese singulären Werte $j(\omega)$ ganze algebraische Zahlen sind [2]), welche mit den quadratischen Formen von negativer Determinante im innigsten Zusammenhange stehen.

Der quadratischen Gleichung

$$(1) \qquad A\omega^2 + B\omega + C = 0,$$

in welcher A, B und C ohne gemeinschaftlichen Teiler, A, C und

---

[1]) Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Elfter Abschnitt, §. 86.

[2]) Weber a. a. O. §. 87.

$\Delta = 4AC - B^2$ positiv sind, entspricht nämlich eine primitive quadratische Form erster oder zweiter Art

$$(2) \qquad \psi = (A, {}^1/_2 B, C) \quad \text{oder} \quad = (2A, B, 2C),$$

je nachdem B gerade oder ungerade, also

$$\Delta \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \pmod 4)$$

ist.

Die quadratische Gleichung (1) geht durch die lineare Substitution

$$(3) \qquad \omega = \frac{\gamma + \delta\omega'}{\alpha + \beta\omega'}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

in eine Gleichung derselben Form

$$(4) \qquad A'\omega'^2 + B'\omega' + C' = 0$$

über mit derselben Determinante

$$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2 = \Delta;$$

und die dieser Gleichung entsprechende quadratische Form

$$(5) \qquad \psi' = (A', {}^1/_2 B', C') \quad \text{oder} \quad = (2A', B', 2C')$$

ist mit der Form (ψ) äquivalent.

Wird daher die Wurzel ω der Gleichung (1) mit positivem imaginären Bestandteil auch die Wurzel der Form ψ genannt, und nennt man zwei Zahlen ω und ω', die in der Beziehung (3) zu einander stehen, äquivalente Zahlen, so sind quadratische Formen dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Wurzel äquivalente Zahlen sind.

Nun hat die Funktion $j(\omega)$ die fundamentale Eigenschaft, dafs zwei Werte $j(\omega)$ und $j(\omega')$ dann und nur dann einander gleich sind, wenn ω und ω' äquivalente Zahlen sind[1]), und es gehört somit einer der singulären Werte von $j(\omega)$ nicht nur zu einer bestimmten quadratischen Form mit negativer Determinante, sondern zu einer ganzen Formenklasse und unterscheidet diese Klasse von allen anderen Formenklassen derselben Determinante. Daher heifst dieser singuläre Wert $j(\omega)$ die Klasseninvariante.

Die Gleichungen

$$\Pi[u - j(\omega)] = H_m(u), \quad \text{resp.} \quad = H'_m(u) = 0,$$

worin sich das Produkt über alle Invarianten primitiver Klassen erster resp. zweiter Art der Determinante $-m$ erstreckt, haben

---

[1]) Weber a. a. O. Fünfter Abschnitt, §. 47.



ganze rationale Koëffizienten und werden als Klassengleichungen bezeichnet[1]). Der Grad dieser Gleichungen ist gleich der Klassenzahl der quadratischen Formen erster resp. zweiter Art der Determinante $-m$. Die höchste Potenz von u hat den Koëffizienten 1.

Dieser Begriff der Klasseninvariante und Klassengleichung kann nun aber erweitert werden, wenn wir den algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}[j(\omega)]$ betrachten, welcher der Inbegriff aller rationalen Funktionen von $j(\omega)$ mit rationalen Zahlenkoëffizienten ist. Jede primitive Zahl dieses Körpers $\mathfrak{K}[j(\omega)]$ wird als Klasseninvariante bezeichnet, und Klassengleichung ist die rationale Gleichung, deren Wurzeln die verschiedenen Werte einer Klasseninvariante sind. In der That eignen sich zur Berechnung andere Modulfunktionen als Klasseninvarianten besser als die Funktion $j(\omega)$.

Wir unterscheiden Klasseninvarianten und Klassengleichungen erster und zweiter Art, je nachdem die entsprechenden Formenklassen erster oder zweiter Art sind. Da aber die Klasseninvarianten zweiter Art rational durch die der ersten Art ausdrückbar sind[2]), so werden wir uns im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, auf die Klasseninvarianten und Klassengleichungen erster Art beschränken.

Unter den Modulfunktionen, welche sich vorzüglich zu Klasseninvarianten eignen, sind die Potenzen von $f(\omega)$ besonders zu nennen, welche meistens sehr leicht die Aufstellung der Klassengleichungen gestatten. Wir haben hier die quadratischen Formen mit negativer durch 3 nicht teilbarer Determinante von denen mit durch 3 teilbarer Determinante zu unterscheiden. Für die ersteren ergeben sich recht niedrige Potenzen von $f(\omega)$ als Klasseninvarianten[3]); für die letzteren sind jedenfalls $f(\omega)^{24}$ oder $f_1(\omega)^{24}$ Klasseninvarianten. Aus den nachher folgenden Beispielen wird sich aber ergeben, dafs auch niedrigere Potenzen der $f(\omega)$ Klasseninvarianten sein können, da für dieselben algebraische Gleichungen mit ganzen rationalen Koëffizienten bestehen.

Diese Klassengleichungen haben nun die interessantesten Eigenschaften, welche den Sätzen über die quadratischen Formen

1) Weber a. a. O. §. 88.
2) Daselbst §. 89.
3) Daselbst §. 94.

entsprechen, und wodurch letztere sogar bewiesen werden können. So tritt recht deutlich die Einteilung der Formenklassen einer Determinante in Geschlechter in der Zerfällung der Klassengleichung zu Tage.

Um die Formenklassen der Determinante $-m$ in Geschlechtern zu vereinigen, bilden wir primitive Formen erster oder zweiter (σter) Art, deren erster Koëffizient σA ist, wo A eine zu $2m$ teilerfremde positive Zahl ist:

$$\left(\sigma A, \frac{\sigma}{2} B, \sigma C\right).$$

Ist dann m'' irgend ein ungerader, durch kein Quadrat teilbarer Divisor von m, so haben die Symbole:

$$\left(\frac{A}{m''}\right) \qquad m \equiv 3 \pmod 4$$

$$\left(\frac{A}{m''}\right), \left(\frac{-1}{A}\right) \qquad m \equiv 1 \pmod 4$$

$$\left(\frac{A}{m''}\right), \left(\frac{2}{A}\right) \qquad m \equiv 6 \pmod 8$$

$$\left(\frac{A}{m''}\right), \left(\frac{-2}{A}\right) \qquad m \equiv 2 \pmod 8$$

$$\left(\frac{A}{m''}\right), \left(\frac{-1}{A}\right) \qquad m \equiv 4 \pmod 8$$

$$\left(\frac{A}{m''}\right), \left(\frac{-1}{A}\right), \left(\frac{2}{A}\right) \qquad m \equiv 0 \pmod 8$$

einen von der besonderen Wahl von A unabhängigen, nur von der Formenklasse, durch welche A darstellbar ist, abhängigen Wert. Diese Symbole, welche den Wert ± 1 haben, heifsen die Charaktere der betreffenden Formenklasse. Beschränkt man m'' auf die in m aufgehenden, voneinander verschiedenen ungeraden Primzahlen, so erhält man das System der voneinander unabhängigen Charaktere, deren Anzahl mit λ bezeichnet wird. In ein Geschlecht werden nun nach Gaufs alle diejenigen Formenklassen vereinigt, welche in sämtlichen Charakteren übereinstimmen. Die Zahl dieser Geschlechter ist $2^{\lambda-1}$, und jedes enthält eine gleich grofse Anzahl von Formenklassen. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des schönen Satzes über die Klassengleichungen: die Klassengleichung läfst sich unter Adjunktion gewisser Quadratwurzeln in ebenso viele Faktoren zerlegen, als

Geschlechter vorhanden sind, und jede dieser Teilgleichungen wird durch die Klasseninvarianten eines Geschlechtes befriedigt[1]).

Eine andere Eigenschaft der Klassengleichungen hängt mit der Komposition der quadratischen Formen aufs innigste zusammen.

Sind

$$\psi = (A, B, C) \quad \text{und} \quad \psi' = (A', B', C')$$

zwei einige quadratische Formen der negativen Determinante $-m$, in welchen also A, A' und $B + B'$ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so läſst sich eine dritte Form derselben Determinante $-m$ finden

$$\psi'' = (AA', B'', C''),$$

in welcher B'' den Bedingungen genügt:

$$B'' \equiv B \pmod{A}, \quad B'' \equiv B' \pmod{A'}, \quad B''^2 \equiv -m \pmod{AA'}.$$

Die Form ψ'' heiſst zusammengesetzt, komponiert aus ψ und ψ', was symbolisch angedeutet wird durch

$$\psi'' = \psi \cdot \psi'.$$

Die Bedeutung dieser Komposition beruht in dem Satze:

Sind die beiden einigen Formen (A, B, C) und (A', B', C') resp. äquivalent den beiden einigen Formen (M, N, L) und (M', N', L'), so ist auch die aus den beiden ersteren zusammengesetzte Form (AA', B'', C'') äquivalent der aus den beiden letzteren zusammengesetzten Form (MM', N'', L'').

In diesem Satze ist die Komposition der Formenklassen begründet: Sind k, k' die Klassen, welche durch die Formen ψ, ψ' repräsentiert sind, so heiſst die durch ψ'' repräsentierte Klasse k'' aus k, k' zusammengesetzt, komponiert, und man schreibt symbolisch:

$$k'' = k \cdot k'.$$

Hiernach sind die Potenzen $k^2, k^3, \ldots$ entstanden durch wiederholte Komposition einer Klasse erster Art mit sich selbst.

Von groſser Wichtigkeit ist es, daſs die primitiven Klassen erster Art der Determinante $-m$ eine Abelsche Gruppe bilden, indem neben dem associativem Gesetz

$$(kk')k'' = k(k'k'') = kk'k''$$

auch noch das kommutative Gesetz gilt:

$$kk' = k'k.$$

---

[1]) Weber a. a. O. Dreizehnter Abschnitt, §§. 106, 107, 108.



Das Einheitselement dieser Gruppe ist die Hauptklasse, welche durch die Hauptform $(1, 0, m)$ repräsentiert ist; denn durch Komposition mit dieser Hauptform ändert sich eine andere Form nicht.

Zwei entgegengesetzte Klassen (welche durch Gefährten repräsentiert werden können), sind durch k, k^{-1} zu bezeichnen; denn ihre Formen (A, B, C) und (C, B, A) führen durch Komposition zur Hauptform. Für jede Klasse k giebt es eine gewisse niedrigste Potenz k^{ε}, welche gleich 1 ist. Wir sagen, k gehört zum Exponenten ε und das System

$$1, k, k^2, \ldots k^{\varepsilon-1}$$

heifst die Periode von k.

Für eine ambige Klasse, in welche zwei entgegengesetzte Formen oder zwei Gefährten gehören, ist $\varepsilon = 2$.

Die Charaktere einer zusammengesetzten Klasse erhält man, indem man die Charaktere der einzelnen Komponenten multipliziert. Daher ergeben zwei Klassen des Hauptgeschlechts, deren sämtliche Charaktere $+1$ sind, durch Komposition immer wieder eine Klasse des Hauptgeschlechts, und es folgt, dafs die Klassen des Hauptgeschlechts eine in der Gruppe aller Klassen enthaltene Abelsche Gruppe bilden [1]).

Bezeichnen wir mit (k) die zu der primitiven Klasse k zugehörige Klasseninvariante, so läfst sich der Zusammenhang der Klasseninvariante mit der Formenklasse einfach ausdrücken. In sehr eleganter und einfacher Weise leitet Herr Prof. Weber mit Hilfe zweier ganz bestimmten entgegengesetzten Formenklassen l und l^{-1} und ihrer Invarianten (l) und (l^{-1}) die Relationen zwischen den Klasseninvarianten derselben Determinante her, welche sich in dem Satze aussprechen:

Sind s, k zwei beliebige Klassen der Determinante $-m$, deren erste von der ersten Art ist, und bezeichnen wir mit f_s eine rationale Funktion, deren Form durch die Klasse s allein bestimmt ist, so ist

$$(sk) = f_s(k, \sqrt{-m})$$
$$(s^{-1}k) = f_s(k, -\sqrt{-m}).$$

Nehmen wir daher an, es sei dem Rationalitätsbereich der rationalen Zahlen die $\sqrt{-m}$ adjungiert, und bezeichnen wir mit

[1]) Weber a. a. O. Vierzehnter Abschnitt, §. 108.



$$R(k, k', k'', \ldots)$$

irgend eine rationale Funktion der sämtlichen Klasseninvarianten erster oder zweiter Art (k), (k'), (k''), ..., so läſst sich diese Funktion rational ausdrücken durch eine der Gröſsen (k), also etwa

$$R(k, k', k'', \ldots) = R'(k).$$

Bedeutet ferner (s) eine beliebige der Klasseninvarianten erster Art, und hat die Funktion R die Eigenschaft, durch die sämtlichen h Permutationen

$$\begin{pmatrix} k, & k', & k'', \ldots \\ sk, & sk', & sk'', \ldots \end{pmatrix},$$

deren Gesamtheit wir mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen, ungeändert zu bleiben, so ist $R'(k) = R'(sk)$ und daher rational ausdrückbar:

Die Galoissche Gruppe der Klassengleichung nach Adjunktion von $\sqrt{-m}$ ist also in dem System $\mathfrak{S}$ enthalten, und da $\mathfrak{S}$ eine Abelsche Gruppe ist, so ist die Klassengleichung eine Abelsche und durch Wurzelzeichen auflösbar[1]).

Sind $k, k', k'', \ldots$ die Klassen zweiter Art, so sind für s gleichwohl die Klassen erster Art zu setzen. Ist dann

$$m \equiv 7 \pmod 8,$$

so bleibt der Grad der Gruppe $\mathfrak{S}$ derselbe, ist aber

$$m \equiv 3 \pmod 8,$$

so giebt es drei unter den s, welche die Reihe der $k, k', k'', \ldots$ ungeändert lassen, und der Grad der Gruppe $\mathfrak{S}$ reduziert sich auf den dritten Teil der Anzahl der primitiven Klassen erster Art[2]).

Nehmen wir an, die Funktion R habe reelle rationale Koëffizienten, so wird gleichwohl ihr rationaler Ausdruck die Form $a + b\sqrt{-m}$ haben, worin a, b rationale Zahlen sind. Der imaginäre Teil wird dann und nur dann wegfallen, wenn R auch durch die Vertauschung sämtlicher Klassen $k, k', k'', \ldots$ mit ihren entgegengesetzten ungeändert bleibt. Daraus folgt, daſs ohne Adjunktion von $\sqrt{-m}$ die Galoissche Gruppe der Klassengleichung enthalten ist in dem System von $2h$ Permutationen, welches man erhält, wenn man in $\mathfrak{S}$ jede Klasse in ihre entgegengesetzte verwandelt. Nur in dem besonderen Falle, in dem alle Klassen

1) Weber a. a. O. §. 109.

2) Daselbst §. 89 u. §. 108.

ambig sind, der nur für eine endliche Anzahl von Determinanten stattfindet, ist dieses letztere System mit 𝔖 identisch, und die Klassengleichung ist ohne Adjunktion von $\sqrt{-m}$ eine Abelsche.

Wir haben bei dem Ausspruche der letzten Sätze über die Auflösbarkeit der Klassengleichungen stillschweigend vorausgesetzt, dafs dieselben ohne Adjunktion von Quadratwurzeln irreduzibel sind. Herr Prof. Weber beweist diese Irreduzibilität mit Hilfe der Primideale[1]) und stellt damit endgültig fest, dafs die gefundene Gruppe 𝔖 die wahre Gruppe der Klassengleichung ist.

II.

Es seien $k, k', k'' \ldots$ die primitiven Klassen erster Art der Determinante $-m$; ihre Invarianten $(k), (k'), (k'') \ldots$ sind die Wurzeln der Klassengleichung $H_m(u) = 0$ vom Grade h der Anzahl der Formenklassen. Diese Klassengleichung haben wir als eine Abelsche erkannt, wenn wir die Wurzel $\sqrt{-m}$ dem Rationalitätsbereich adjungieren. Wir wollen im folgenden die Adjunktion dieser Quadratwurzel zur Voraussetzung machen.

Greifen wir nun eine beliebige Klasse k heraus, komponieren diese mit einer anderen l, welche zum Exponenten ε gehört, und bilden die Reihe der Klasseninvarianten

$$(k), (lk), (l^2k), \ldots, (l^{\varepsilon-1}k) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

so sind diese voneinander verschieden, und jede folgende ist durch die vorhergehende in derselben Weise rational ausdrückbar:

$$(lk) = f_l(k, \sqrt{-m}); \quad (l^2k) = f_l(lk, \sqrt{-m}); \ldots$$

Entweder ist nun durch die Reihe $k, lk, l^2k, \ldots$ die Reihe der Klassen erschöpft, oder es existiert noch eine Klasse s. Dann komponieren wir diese wieder mit l und bilden die Invarianten:

$$(s), (ls), (l^2s), \ldots, (l^{\varepsilon-1}s) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Diese sind wieder voneinander verschieden, da die zugehörigen Klassen voneinander verschieden sind, und aus demselben Grunde sind sie von den Gliedern der Gruppe (1) verschieden. Auch

[1]) Weber a. a. O. §. 110.



in der Reihe (2) ist wieder jede folgende Invariante aus der vorhergehenden durch dieselbe rationale Funktion darstellbar.

$$(ls) = f_1(s, \sqrt{-m}); \quad (l^2 s) = f_1(ls, \sqrt{-m}); \ldots$$

Sollte nun noch nicht die Reihe der Formenklassen erschöpft sein, so mufs noch eine Formenklasse t vorhanden sein, welche durch Komposition von k mit s erhalten wird. Diese Formenklasse t komponieren wir wieder mit l und bilden die Reihe der Klasseninvarianten:

$$(t), (lt), (l^2 t), \ldots, (l^{\varepsilon-1} t) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Auch von dieser Reihe ist leicht einzusehen, dafs ihre Glieder unter sich und von den Gliedern der Reihen (1) und (2) verschieden sind. Wenn wir nun unseren Schlufs so weiter fortsetzen, gelangen wir schliefslich zu einer letzten Reihe

$$(u), (lu), (l^2 u), \ldots, (l^{\varepsilon-1} u) \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

womit dann alle Klasseninvarianten erschöpft sind. Wenn wir jetzt noch die Klasse u mit der Klasse s komponieren, gelangen wir wieder zu dem Anfangsglied (k) zurück. Wir erkennen hieraus zunächst, dafs ε ein Teiler von h, $\varepsilon \,.\, e = h$, ist.

Zum Ausgangsglied nehmen wir nun nicht mehr die Invariante der beliebigen Klasse k, sondern die der Hauptklasse, welche wir mit (1) bezeichnen können. Bilden wir dann in der erwähnten Weise jene Reihen (1) bis (e) von Klasseninvarianten, so können wir aus ihnen folgende Summen herleiten:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= (1) + (l) + (l^2) + \ldots + (l^{\varepsilon-1}) \\
\eta_1 &= (s) + (ls) + (l^2 s) + \ldots + (l^{\varepsilon-1} s) \\
\eta_2 &= (s^2) + (ls^2) + (l^2 s^2) + \ldots + (l^{\varepsilon-1} s^2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_{e-1} &= (s^{e-1}) + (ls^{e-1}) + (l^2 s^{e-1}) + \ldots + (l^{\varepsilon-1} s^{e-1}).
\end{aligned}$$

Diese Summen können wir analog den Kreisteilungsperioden ebenfalls als Perioden bezeichnen.

Sie haben die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn in ihnen die Wurzel (1) durch irgend eine andere Wurzel der Periode η_0 ersetzt wird, dagegen sich cyklisch zu vertauschen, wenn (1) durch eine Wurzel ersetzt wird, welche einer der anderen Perioden angehört.

Wir haben hier die Glieder der Perioden Wurzeln genannt in Rücksicht darauf, dafs sie die Wurzeln der Klassengleichung sind.

Es ist nun die Wurzel (l) rational durch die Wurzel (1) ausdrückbar in der Form

$$(l) = f_l(1, \sqrt{-m}).$$

In derselben Beziehung stehen dann auch (l) und (l^2), (l^2) und (l^3) u. s. f.

Daher ist die ganze Periode η_0 rational durch ihr erstes Glied (1) ausdrückbar in der Form

$$\eta_0 = F(1, \sqrt{-m}).$$

In derselben Beziehung steht dann auch die Periode η_1 zu ihrem ersten Gliede (s), also

$$\eta_1 = F(s, \sqrt{-m}) \text{ u. s. f.}$$
$$\eta_2 = F(s^2, \sqrt{-m})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{e-1} = F(s^{e-1}, \sqrt{-m}).$$

Vergleichen wir nun aber weiter die beiden Wurzeln (1) und (s) miteinander, so ist auch (s) rational durch (1) ausdrückbar in der Form

$$(s) = f_s(1, \sqrt{-m}).$$

Daher ist auch die Periode η_1 selber rational durch η_0 ausdrückbar, und durch dieselbe rationale Funktion drückt sich auch die nächste Periode η_2 durch η_1 aus u. s. w., weil auch das Anfangsglied (s^2) durch das Anfangsglied (s) rational ausdrückbar ist in der Form

$$(s^2) = f_s(s, \sqrt{-m}) \text{ u. s. w.}$$

Die e Perioden $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{e-1}$ genügen also einer Gleichung vom Grade e, deren Koëffizienten ganze und symmetrische Funktionen der e Perioden sind:

$$(x - \eta_0)(x - \eta_1)(x - \eta_3) \ldots (x - \eta_{e-1}) = 0.$$

Da jede Wurzel dieser Gleichung, wie wir eben erkannt haben, nach Adjunktion der Quadratwurzel $\sqrt{-m}$ sich rational durch eine unter ihnen ausdrücken läfst, so ist dieselbe eine Abelsche Gleichung vom Grade e.

Unter diesen Teilgleichungen erregen einige unser besonderes Interesse, die in folgender Weise entstehen. Wenn für die Determinante $-m$ eine ambige Klasse erster Art existiert, die wir wieder mit l bezeichnen wollen, so ist für dieselbe der Exponent $\varepsilon = 2$, d. h. es ist $l^2 = 1$ gleich der Hauptklasse. Dann

besteht jede Periode unseres Periodensystems immer nur aus zwei Summanden:

$$\eta_0 = (1) + (l)$$
$$\eta_1 = (s) + (ls)$$
$$\eta_2 = (s^2) + (ls^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{e-1} = (s^{e-1}) + (ls^{e-1}).$$

In diesem besonderen Falle läfst sich aber die Klasseninvariante (lk) auch ohne Adjunktion einer Quadratwurzel rational durch (k) ausdrücken durch eine Funktion, deren Form von der Klasse (l) abhängt. Jede Periode $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{e-1}$ ist daher ein und dieselbe rationale Funktion ihres Anfangsgliedes (1), (s), $(s^2), \ldots (s^{e-1})$ und die Wurzel einer Abelschen Gleichung vom Grade $\frac{h}{2}$.

Diese zugehörige Teilgleichung läfst sich in vielen Fällen leicht aufstellen, falls wir als Klasseninvarianten die erwähnten Potenzen von $f(\omega)$ wählen. Für diese besteht nämlich noch ein sehr wichtiger und interessanter Satz [1]):

Setzt man für ω die h Wurzeln der Formen erster Art eines Systems von Repräsentanten der Determinante $-m$, so sind die h Zahlen $f(\omega)$ untereinander associiert, und es ist

$$f(\omega) : 2^r$$

eine ganze Zahl und zwar eine Einheit. Diese algebraischen Einheiten sind folgende Gröfsen:

$$\frac{f(\omega)}{\sqrt[4]{2}}, \text{ falls } m \equiv 1, 2 \pmod 4$$
$$\frac{f(\omega)}{\sqrt[3]{2}}, \quad \text{„} \quad m \equiv 3 \pmod 8$$
$$\frac{f(\omega)}{\sqrt{2}}, \quad \text{„} \quad m \equiv 7 \pmod 8.$$

Da nun die Klasseninvarianten in sehr einfacher Beziehung zu diesen Gröfsen stehen, so ist die algebraische Teilgleichung, deren Wurzeln die Perioden sind, sehr einfach und oft leicht zu bilden.

Wir wollen nun zunächst untersuchen, in welchen Fällen

---

1) Weber a. a. O. Fünfzehnter Abschnitt, §. 114.



wir solche einfache Perioden, wie wir sie zuletzt betrachtet haben, bilden können.

Dazu ist nötig, dafs zu der Determinante $-m$ eine ambige Klasse erster Art existiert. Das ist in folgenden Fällen der Fall:

1) Ist $m \equiv \pm 2 \pmod 8$, so ist $\frac{m}{2} \equiv \pm 1 \pmod 4$ eine ungerade Zahl und somit $\left(2, 0, \frac{m}{2}\right)$ der Repräsentant einer ambigen Klasse erster Art;

2) ist $m \equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod 8$, so ist $\frac{m+1}{2}$ eine ungerade Zahl und somit

$$\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$$

äquivalent mit

$$\left(2, 1, \frac{m+1}{2}\right)$$

der Repräsentant einer ambigen Klasse erster Art.

Nur in diesen Fällen haben wir aber auch in der ambigen Klasse Formen mit dem ersten Koëffizienten 2 und da die Transformationsformeln zweiter Ordnung für die f-Funktionen bekannt sind[1]), so ist es in diesen Fällen leicht, die Perioden durch ihr Anfangsglied darzustellen.

Der einfachste Fall ist nun der, wo wir nur zwei Perioden haben, die Teilgleichung also vom zweiten Grade ist. In diesem Falle besitzt also die Determinante $-m$ vier Formenklassen erster Art, welche in zwei Geschlechtern verteilt sind. Herr Prof. Weber hat die Fälle dieser Art schon näher untersucht und die Klasseninvarianten resp. Teilgleichungen zweiten Grades für die in betracht kommenden Fälle

$$m \equiv \pm 2 \pmod 8 \quad \text{oder} \quad m \equiv 1 \pmod 8)$$

aufgestellt[2]). Zwar hat er nicht die Teilgleichung selbst angegeben, sondern nur ihre Wurzeln angeführt. Bekanntlich ist es aber hiernach nicht schwer, die Gleichung selbst aufzustellen. Ein Beispiel möge genügen:

Für die Determinante -34 wird gesetzt:

---

[1]) Weber a. a. O. Dritter Abschnitt, §. 29.

[2]) Daselbst §. 116.

$$f_1(\sqrt{-34})^2 = \sqrt{2} \,.\, x$$

und die Periode gefunden:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Es ist dann

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{13 + 3\sqrt{17}}{2}$$

und

$$3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{9 + 3\sqrt{17}}{2},$$

woraus durch Subtraktion die Teilgleichung folgt:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$$

oder

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0.$$

Diese Fälle bieten daher kein weiteres Interesse. Dagegen sind die Teilgleichungen dritten Grades noch nicht untersucht und nur in wenigen Fällen ($m = 26, 29, 35, 38, 44, 50, 51, 75$ $91, 99, 175$) die Klassengleichungen für die in betracht kommenden Determinanten aufgestellt. Aus diesen Klassengleichungen lassen sich aber die einfachen Periodengleichungen sehr leicht bilden. Solche einfache Periodengleichungen bestehen nach unserer allgemeinen Untersuchung für $m = 26, 29, 38$ und 50. Wir wollen dieselben aus den von Herrn Prof. Weber aufgestellten Klassengleichungen herleiten.

1) $m = 26 \equiv 2 \pmod 8$.

Wird $f_1(\sqrt{-26})^2 = \sqrt{2} \,.\, y$ gesetzt, so findet sich (Weber a. a. O. S. 376) die Klassengleichung

$$y^6 - 2y^5 - 2y^4 + 2y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Hieraus leitet sich die Teilgleichung sehr leicht ab, indem die Klassengleichung in der Form geschrieben werden kann:

$$\left(y - \frac{1}{y}\right)^3 - 2\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right) - 4 = 0.$$

Dieses ist die gesuchte Teilgleichung.

Für die anderen Determinanten $m = 29, 38$ und 50 finden wir die Klassengleichungen im Anhang zu dem erwähnten Buche von Herrn Prof. Weber.

2) $\underline{m = 29 \equiv 5 \pmod 8}$.

Wird $f(\sqrt{-29})^4 = 2x$ gesetzt, so ist die Klassengleichung:

$$2x^3 - 9x^2 - 8x - 5 = \sqrt{29}\,(x+1)^2$$

oder, wenn wir auf beiden Seiten quadrieren:

$$4x^6 - 36x^5 + 49x^4 + 124x^3 + 154x^2 + 80x + 25$$
$$= 29(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$$

oder

$$4x^6 - 36x^5 + 20x^4 + 8x^3 - 20x^2 - 36x - 4 = 0$$

oder

$$x^6 - 9x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 9x - 1 = 0,$$

welche Gleichung in der Form geschrieben werden kann:

$$\underline{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 - 9\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 8\left(x - \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.}$$

Dieses ist die gesuchte Teilgleichung.

3) $\underline{m = 38 \equiv 6 \pmod 8}$.

Wird $f_1(\sqrt{-38})^2 = \sqrt{2}\,.\,x$ gesetzt, so heifst die Klassengleichung:

$$x^3 - 2x^2 - (2x+1)(1+\sqrt{2}) = 0$$

oder

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = \sqrt{2}\,(2x+1).$$

Wird auf beiden Seiten quadriert, so kommt:

$$x^6 - 4x^5 + 6x^3 + 8x^2 + 4x + 1 = 2(4x^2 + 4x + 1)$$

oder

$$x^6 - 4x^5 + 6x^3 - 4x - 1 = 0,$$

welche Gleichung in der Form geschrieben werden kann:

$$\underline{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2 = 0.}$$

Dieses ist die gesuchte Teilgleichung dritten Grades.

4) $\underline{m = 50 \equiv 2 \pmod 8}$.

Wird $f_1(\sqrt{-50}) = \sqrt[4]{2}\,.\,x$ gesetzt, so ist die Klassengleichung:

$$x^3 - x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,(x+1)$$

oder

$$2x^3 - 2x^2 - x - 1 = \sqrt{5}\,(x+1).$$

Wir erheben auf beiden Seiten ins Quadrat und erhalten:

$$4x^6 - 8x^5 + 5x^2 + 2x + 1 = 5(x^2 + 2x + 1),$$

oder

$$4x^6 - 8x^5 - 8x - 4 = 0,$$

oder

$$x^6 - 2x^5 - 2x - 1 = 0,$$

aus welcher sich leicht die Teilgleichung dritten Grades ergiebt:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 - 2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

III.

Wir wollen nun im folgenden solche Teilgleichungen dritten Grades, wie wir sie eben gefunden haben, noch etwas näher untersuchen und in einigen weiteren Beispielen bilden. Sie werden also nach unserer allgemeinen Erörterung nur für solche negativen Determinanten $-m$ vorkommen, für welche

$$m \equiv \pm 2 \pmod 8 \text{ oder } \equiv 1 \text{ oder } \equiv 5 \pmod 8)$$

ist, und für welche sechs Formenklassen erster Art in zwei Geschlechtern verteilt existieren. Es sind dieses nach der Gaufs-schen Tafel noch folgende Determinanten:

$$m = 81, 121, 169 \equiv 1 \pmod 8,$$
$$m = 106, 162, 202, 298 \equiv 2 \pmod 8,$$
$$m = 53, 61, 109, 157, 277, 397 \equiv 5 \pmod 8,$$
$$m = 54, 118, 214, 262, 358 \equiv 6 \pmod 8.$$

Für alle diese Determinanten existieren sechs Formenklassen erster Art; unter ihnen ist eine ambige Klasse mit einem Vertreter, dessen erster Koëffizient 2 ist, und wir können daher drei zweigliederige Perioden bilden, welche einer Abelschen Gleichung dritten Grades genügen. Um diese Gleichung zu finden, können wir zwei Wege einschlagen:

Bei denjenigen Determinanten, welche einen quadratischen Faktor enthalten, verfahren wir ähnlich wie vorhin. Wir stellen erst die Klassengleichung auf und zwar mit Hilfe der Schläflischen Modulargleichungen aus den schon bekannten Invarianten für den zweiten Faktor. Aus dieser Klassengleichung leiten wir dann, da uns eine Periode bekannt ist, sehr leicht die Periodengleichung her.

Bei den anderen Determinanten berechnen wir näherungsweise mit Hilfe die Näherungsformel

$$f(\omega) = f_1(\omega) = e^{-\frac{\pi i \omega}{24}}$$

die Summe und das Produkt der drei Perioden. Dadurch sind uns dann in der Teilgleichung dritten Grades

$$\eta^3 + a\eta^2 + b\eta + c = 0$$

der Koëffizient a und c bekannt; und da die Koëffizienten ganze Zahlen sein müssen, so ist die Gleichung selbst hiernach leicht zu bilden. Die Koëffizienten werden sehr einfache Zahlen sein; und um sicher zu sein, dafs die gefundene Gleichung richtig ist, bilden wir die Diskriminante, das Produkt der quadrierten Wurzeldifferenzen, welche eine ganz bestimmte Eigenschaft besitzen mufs.

Wenn in einer Gleichung dritten Grades für x mit den Wurzeln x_1, x_2 und x_3 die Quadratwurzel aus der Diskriminante $\sqrt{D}$ dem Rationalitätsbereich adjungiert wird, so können die Wurzeln x_2 und x_3 als rationale Funktionen der Wurzel x_1 und der bekannten Gröfsen ausgedrückt werden[1]). Jetzt wissen wir von unserer Periodengleichung dritten Grades, dafs nach Adjunktion von $\sqrt{-m}$ ihre Wurzeln durch eine unter ihnen rational ausgedrückt werden können. Es mufs daher diese $\sqrt{-m}$ in der Beziehung zu der Diskriminante der Gleichung stehen, dafs

$$\sqrt{D} = g\sqrt{-m}$$

ist, worin g eine ganze rationale Zahl ist. Es ist daher für unsere Teilgleichungen

$$\underline{D = -m \cdot g^2.}$$

Diese Beziehung der Diskriminante zu der Determinante $-m$ kann uns immer zur Prüfung unserer Gleichungen dienen.

Ehe wir nun einige Beispiele nach den angegeben Methoden durchführen, wollen wir zur besseren Übersicht diejenigen Transformationsformeln der f-Funktionen hier zusammenstellen, die wir im folgenden häufiger gebrauchen werden[2]):

$$(1) \qquad f_1(2\omega) \cdot f_2(\omega) = \sqrt{2}$$

$$(2) \qquad f(\omega) \cdot f_2\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{24}} \sqrt{2}.$$

---

[1]) Serret, Höhere Algebra. Teil V; Kap. 1, 511.

[2]) Weber a. a. O. Dritter Abschnitt, §§. 29 u. 35.

Ferner von den linearen Transformationsformeln:

$$(3)\quad f_1\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)=\left(\frac{2}{\gamma}\right)\varrho\,.\,e^{-\frac{8\pi i}{8}\gamma(2\alpha-\delta)}.f_2(\omega);\ \delta\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

$$(4)\quad f\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)=-\varrho\,.\,e^{-\frac{3\pi i}{8}\alpha(2\beta+\gamma)}.f_1(\omega);\ \alpha-\gamma\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)$$

$$(5)\quad f\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)=-\varrho\,.\,e^{-\frac{3\pi i}{8}\beta(2\alpha-\delta)}.f_2(\omega);\ \beta-\delta\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)$$

$$(6)\quad f\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)=\varrho\left(\frac{2}{\alpha-\beta}\right).e^{-\frac{3\pi i}{8}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma-\delta)}.f(\omega);$$

$$\alpha+\beta+\gamma-\delta\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

In diesen Transformationsformeln ist immer

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

und

$$(7)\qquad \varrho=e^{-\frac{2\pi i}{8}[\alpha(\gamma-\beta)-(\alpha^2-1)\beta\delta]}.$$

Nach der ersten Methode behandeln wir folgende Fälle:

Beispiel 1: $m=81\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$.

Wir setzen:

$$u=f(\sqrt{-9})\quad \text{und}\quad v=f(3\sqrt{-9})=f(\sqrt{-81});$$

dann bestehen zwischen u und v für den Transformationsgrad 3 die sogenannten Schäflischen Modulargleichungen[1]). Es ist aber:

$$u^3=f(\sqrt{-9})^3=\sqrt[4]{2}\,(1+\sqrt{3})$$

und wir setzen:

$$v^3=f(\sqrt{-81})^3=\sqrt[4]{8}\,.\,x,$$

damit x (Weber, §. 114) eine ganze algebraische Zahl werde.

Aus den Schläflischen Modulargleichungen ergiebt sich dann:

$$A=\left(\frac{u}{v}\right)^6+\left(\frac{v}{u}\right)^6=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2x^2}+\frac{2x^2}{(1+\sqrt{3})^2};$$

$$B=(uv)^3-\frac{8}{(uv)^3}=2x\,(1+\sqrt{3})-\frac{4}{x(1+\sqrt{3})}.$$

Nun ist $A-B=0$; also:

$$\frac{(1+\sqrt{3})^4+4x^4}{2x^2(1+\sqrt{3})^2}-\frac{2x^2(1+\sqrt{3})^2-4}{x(1+\sqrt{3})}=0$$

oder

---

1) Weber a. a. O., §. 76, S. 272 u. 273.

$$\frac{(1+\sqrt{3})^4 + 4x^4 - 4x^3(1+\sqrt{3})^3 + 8x(1+\sqrt{3})}{2x^2(1+\sqrt{3})^2} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$4x^4 - 4x^3(10 + 6\sqrt{3}) + 8x(1+\sqrt{3}) + 28 + 16\sqrt{3} = 0$$

oder

$$x^4 - x^3(10 + 6\sqrt{3}) + 2x(1+\sqrt{3}) + 7 + 4\sqrt{3} = 0;$$

also

$$x^4 - 10x^3 + 2x + 7 = \sqrt{3}(6x^3 - 2x - 4) = 2\sqrt{3}(3x^3 - x - 2).$$

Heben wir auf beiden Seiten den Faktor $x-1$ fort, der dem Wert $m=1$ entspricht (Weber, §. 97, I), so folgt:

$$x^3 - 9x^2 - 9x - 7 = 2\sqrt{3}(3x^2 + 3x + 2).$$

Erheben wir nun auf beiden Seiten ins Quadrat, so folgt:

$$x^6 - 18x^5 + 63x^4 + 148x^3 + 207x^2 + 126x + 49$$
$$= 12(9x^4 + 18x^3 + 21x^2 + 12x + 4)$$

oder

$$x^6 - 18x^5 - 45x^4 - 68x^3 - 45x^2 - 18x + 1 = 0.$$

Dieses ist zunächst die gesuchte Klassengleichung 6. Grades und die zur Hauptklasse (1, 0, 81) gehörende Klasseninvariante ist

$$x = \frac{f(\sqrt{-81})^3}{\sqrt[4]{8}}.$$

Die zur Determinante -81 gehörenden Formenklassen können durch folgende reduzierte Formen repräsentiert werden:

$$\psi_1 = (1, 0, 81), \quad \psi_2 = (9, 3, 10), \quad \psi_3 = (9, -3, 10),$$

welche das Hauptgeschlecht bilden und

$$\psi_4 = (2, -1, 41), \quad \psi_5 = (5, 2, 17), \quad \psi_6 = (5, -2, 17).$$

Unter diesen repräsentiert ψ_4, welche vermöge der linearen Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ äquivalent ist mit (41, —40, 41), eine ambige Klasse. Komponieren wir dieselbe mit ψ_2, so erhalten wir:

$$\psi_2 \psi_4 = (18, 3, 5),$$

welche Form äquivalent ist mit der reduzierten Form

$$\psi_5 = (5, 2, 17).$$

Ebenso ergiebt sich durch Zusammensetzung

$$\psi_3 \psi_4 = (18, -3, 5),$$

welche äquivalent ist mit

$$\psi_6 = (5, -2, 17).$$



Endlich ergiebt die zu ψ_2 gehörige Formenklasse mit sich selber komponiert die Formenklasse ψ_3. Bezeichnen wir daher die zu den durch ψ_1, ψ_2 und ψ_4 repräsentierten Formenklassen gehörigen Invarianten bezw. mit x, (s) und (l), so haben wir die Perioden:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= x + (l),\\ \eta_1 &= (s) + (l\,s),\\ \eta_2 &= (s^2) + (l\,s^2)\end{aligned}$$

und diese müssen der sich aus der Klassengleichung ergebenden Teilgleichung dritten Grades genügen.

Bezeichnen wir nun die zu (41, —40, 41) gehörende Wurzel mit ω, so ist die Invariante

$$(l) = \frac{f(\omega)^3}{\sqrt[4]{8}}$$

(Weber, §. 94), oder also nach den Transformationsformeln (5) und (2)

$$(l) = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \cdot - e^{-\frac{9\pi i}{8}} f_2 \left(\frac{1 + \sqrt{-81}}{2}\right)^3 = - \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \cdot \frac{e^{-\frac{9\pi i}{8}} e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt{8}}{f(\sqrt{-81})^3}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{8} f(\sqrt{-81})^3} = \frac{\sqrt[4]{8}}{f(\sqrt{-81})^3} = \frac{1}{x}.$$

Daher ist die Periode $\eta_0 = x + \frac{1}{x}$ eine Wurzel der Teilgleichung. In der That läfst sich diese auch in der Form schreiben:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 18\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 48\left(x + \frac{1}{x}\right) - 32 = 0.$$

Zur Bestätigung der Richtigkeit dieser Gleichung bilden wir noch ihre Diskriminante D. Dieselbe mufs, da $m = 81$ ein Quadrat ist, eine negative Quadratzahl sein. In der That ist:

$$\begin{aligned}D &= 4 \,.\, 48^3 - 27 \,.\, 32^2 - 18 \,.\, 18 \,.\, 48 \,.\, 32 + 18^2 \,.\, 48^2 - 4 \,.\, 18^3 \,.\, 32\\ &= - 81 \,.\, 32^2 = - 288^2.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Diskriminante D lassen sich nun die Wurzeln der Teilgleichung dritten Grades leicht bestimmen. Sind a, b, c die Koëffizienten der Gleichung:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0,$$

so sind die Wurzeln dieser Gleichung bestimmt als:

$$x = -\frac{a}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2} + \frac{3i}{2}\sqrt{3D}}$$
$$+ \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2} - \frac{3i}{2}\sqrt{3D}},$$

worin wir für die drei Wurzeln die entsprechenden dritten Wurzeln nehmen müssen. Auf unseren Fall angewandt, ergiebt sich:

$$x + \frac{1}{x} = 6 + 2\sqrt[3]{47 + 2\sqrt{3}} + 2\sqrt[3]{47 - 2\sqrt{3}}.$$

Auch vermag man jetzt die Perioden η_1 und η_2 durch $x + \frac{1}{x}$ mit Hilfe der Koëffizienten und der $\sqrt{-1}$ rational auszudrücken.

Beispiel 2: $m = 121 \equiv 1 \pmod 8$.

Wir setzen:

$$u = f(i) = \sqrt[4]{2};\quad v = f(11\,i) = f(\sqrt{-121}) = \frac{x}{\sqrt[4]{2}}$$

und wenden die Schläflischen Modulargleichungen für den elften Transformationsgrad an:

$$A = \left(\frac{u}{v}\right)^6 + \left(\frac{v}{u}\right)^6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^6 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{8}{x^6} + \frac{x^6}{8},$$
$$B = uv - \frac{2}{uv} = x - \frac{2}{x},$$
$$A - B^5 + B^3 + 2B = 0.$$

Daher:

$$\frac{8}{x^6} + \frac{x^6}{8} - \left(x - \frac{2}{x}\right)^5 + \left(x - \frac{2}{x}\right)^3 + 2\left(x - \frac{2}{x}\right) = 0$$

oder

$$\frac{8}{x^6} + \frac{x^6}{8} - \left(x^5 - 10x^3 + 40x - \frac{80}{x} + \frac{80}{x^3} - \frac{32}{x^5}\right)$$
$$+ \left(x^3 - 6x + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^3}\right) + 2x - \frac{4}{x} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$x^{12} - 8x^{11} + 88x^9 - 352x^7 + 704x^5 - 704x^3 + 256x + 64 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein Quadrat; und somit ergiebt sich als Klassengleichung:

$$x^6 - 4x^5 - 8x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 16x - 8 = 0.$$

Die zur Hauptklasse gehörende Klasseninvariante ist

$$x = \sqrt[4]{2}\, f(\sqrt{-121}).$$

Die zur Determinante -121 gehörenden Formenklassen sind durch folgende reduzierte Formen zu repräsentieren:

$$\psi_1 = (1, 0, 121), \quad \psi_2 = (5, 2, 25), \quad \psi_3 = (5, -2, 25),$$

welche zum Hauptgeschlecht gehören und

$$\psi_4 = (2, -1, 61), \quad \psi_5 = (10, 3, 13) \text{ und } \psi_6 = (10, -3, 13).$$

Unter diesen repräsentiert ψ_4, welche vermöge der Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ äquivalent ist mit $(61, -60, 61)$ eine ambige Klasse. Komponieren wir dieselbe mit der durch ψ_2 repräsentierten Klasse, so erhalten wir die durch $\psi_6 = (10, -3, 13)$ repräsentierte Klasse, und komponieren wir sie mit der durch ψ_3 repräsentierten Klasse, so erhalten wir die durch $\psi_5 = (10, 3, 13)$ repräsentierte Klasse; endlich liefert die durch ψ_2 repräsentierte Klasse mit sich selbst komponiert die Formenklasse ψ_3. Bezeichnen wir daher wieder die zu den durch ψ_1, ψ_2 und ψ_4 repräsentierten Klassen gehörigen Invarianten mit x, (s) und (l) so haben wir die Perioden:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= x + (l), \\ \eta_1 &= (s) + (ls), \\ \eta_2 &= (s^2 + ls^2) \end{aligned}$$

und diese müssen der sich aus der Klassengleichung ergebenden Teilgleichung dritten Grades genügen.

Es ist nun, wenn ω die Wurzel der Form $(61, -60, 61)$, da ihr mittlerer Koëffizient sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist, die Invariante

$$\begin{aligned} (l) &= -\sqrt[4]{2}\, f(\omega) = -\sqrt[4]{2}\left[-e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot e^{-\frac{3\pi i}{8}} f_2\left(\frac{1+\sqrt{-121}}{2}\right)\right] \\ &= \sqrt[4]{2} \cdot e^{-\frac{25\pi i}{24}} f_2\left(\frac{1+\sqrt{-121}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot e^{-\frac{25\pi i}{24}} e^{\frac{\pi i}{24}} \sqrt{2}}{f(\sqrt{-121})} \\ &= -\frac{2}{\sqrt[4]{2}\, f(\sqrt{-121})} = -\frac{2}{x}, \end{aligned}$$

nach den Transformationsformeln (5) und (2). Daher ist die Periode $\eta_0 = x - \dfrac{2}{x}$ eine Wurzel der gesuchten Teilgleichung. In der That ist die Klassengleichung in der Form zu schreiben:

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^3-4\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{2}{x}\right)-4=0.$$

und die Diskriminante dieser Teilgleichung ist:

$$D=32-27.16-18.32+64-4.4^3.4=-121.16=-44^2.$$

Auch hier lassen sich die Perioden η_1 und η_2 durch $x-\frac{2}{x}$ mit Hilfe der Koëffizienten und der $\sqrt{-1}$ rational ausdrücken.

Beispiel 3: $m=169\equiv 1 \pmod 8$.

Wir setzen:

$$u=f(i)=\sqrt[4]{2};\quad v=f(13i)=f(\sqrt{-169})=\sqrt[4]{2}\,.\,x$$

und wenden die Schläflischen Modulargleichungen für den dreizehnten Transformationsgrad an:

$$A=\frac{u}{v}+\frac{v}{u}=\frac{1}{x}+x=\frac{x^2+1}{x},$$

$$B=(uv)^6-\frac{64}{(uv)^6}=8x^6-\frac{8}{x^6}.$$

$$A^7+6A^5+A^3-20A-B=0.$$

Daher:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^7+6\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-20\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$-8x^6+\frac{8}{x^6}=0$$

oder

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^7+6\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-20\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=8\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)=8\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^5-x^3+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right).$$

Heben wir also die Gleichung durch den fremden Faktor $x+\frac{1}{x}$, so reduziert sich dieselbe auf

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6+6\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-20$$
$$=8\left(x^5-x^3+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)$$

oder

$$x^6 - 8x^5 + 12x^4 + 8x^3 + 40x^2 - 8x + 38 + \frac{8}{x} + \frac{40}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \frac{12}{x^4} + \frac{8}{x^5} + \frac{1}{x^6} = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung auf gleiche Benennung bringen, so erhalten wir die Gleichung zwölften Grades:

$$x^{12} - 8x^{11} + 12x^{10} + 8x^9 + 40x^8 - 8x^7 + 38x^6 + 8x^5 + 40x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 = 0,$$

deren linke Seite ein vollständiges Quadrat ist; somit ergiebt sich als Klassengleichung:

$$x^6 - 4x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Die zur Hauptklasse (1, 0, 169) gehörende Klasseninvariante ist

$$x = \frac{f(\sqrt{-169})}{\sqrt[4]{2}}.$$

Die zur Determinante — 169 gehörenden Formenklassen können durch folgende reduzierte Formen repräsentiert werden:

$$\psi_1 = (1, 0, 169), \quad \psi_2 = (10, 1, 17), \quad \psi_3 = (10, -1, 17)$$

welche zum Hauptgeschlecht gehören und

$$\psi_4 = (2, -1, 85), \quad \psi_5 = (5, 1, 34) \text{ und } \psi_6 = (5, -1, 34).$$

Unter diesen repräsentiert wieder ψ_4, welche vermöge der Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ äquivalent ist mit (85, —84, 85), eine ambige Klasse. Komponieren wir dieselbe mit ψ_2 oder der zu ihr äquivalenten Form (17, —1, 10), so erhalten wir die Form (34, — 1, 5), welche äquivalent ist mit $\psi_5 = (5, 1, 34)$. Ebenso ergiebt sich durch Komposition mit der durch ψ_3 repräsentierten Formenklasse die durch $\psi_6 = (5, -1, 34)$ repräsentierte Formenklasse, endlich liefert die durch ψ_2 repräsentierte Klasse mit sich selbst komponiert die Formenklasse ψ_3. Bezeichnen wir daher wieder die zu den durch ψ_1, ψ_2 und ψ_4 repräsentierten Klassen gehörigen Invarianten bezw. mit x, (s) und (l), so haben wir die Perioden:

$$\eta_0 = x + (l),$$
$$\eta_1 = (s) + (ls),$$
$$\eta_2 = (s^2) + (ls^2)$$

und diese sind die Wurzeln der sich aus der Klassengleichung ergebenden Teilgleichung dritten Grades.



Es ist nun, wenn ω die Wurzel der Form (85, —84, 85), da ihr mittlerer Koëffizient sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist, die Invariante

$$(l) = -\frac{f(\omega)}{\sqrt{2}}.$$

In derselben Weise wie beim vorigen Beispiele ergiebt sich hieraus mit Hilfe der Transformationsformeln (5) und (2)

$$(l) = -\frac{f(\omega)}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}f(\sqrt{-169})} = -\frac{\sqrt[4]{2}}{f(\sqrt{-169})} = -\frac{1}{x}.$$

Daher ist die Periode $\eta_0 = x - \frac{1}{x}$ eine Wurzel der gesuchten Teilgleichung. In der That läfst sich die Klassengleichung in der Form schreiben:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 12 = 0.$$

Die zur Prüfung berechnete Diskriminante dieser Teilgleichung liefert:

$$D = -4 - 27 \,.\, 144 + 18 \,.\, 48 + 16 - 4 \,.\, 4^3 \,.\, 12$$
$$= -169 \,.\, 36 = -78^2.$$

Man vermag auch in diesem Falle die Perioden η_1 und η_2 durch $x - \frac{1}{x}$ mit Hilfe der Koëffizienten und $\sqrt{-1}$ rational auszudrücken.

Beispiel: $m = 162 \equiv 2 \pmod 8$.

Wir setzen:

$$u_1 = f_1(\sqrt{-18}); \quad v_1 = f_1(3\sqrt{-18}) = f_1(\sqrt{-162}),$$
$$u_1^3 = f_1(\sqrt{-18})^3 = \sqrt[4]{2}\,(2 + \sqrt{6}); \quad v_1^3 = f_1(\sqrt{-162})^3 = \sqrt[4]{8}\,.\,x$$

und wenden die Schläflischen Modulargleichungen für den dritten Transformationsgrad an:

$$A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6 = \frac{(2+\sqrt{6})^2}{2x^2} - \frac{2x^2}{(2+\sqrt{6})^2}$$
$$= \frac{(2+\sqrt{6})^4 - 4x^4}{2(2+\sqrt{6})^2 x^2},$$

$$B_1 = (u_1 v_1)^3 + \frac{8}{(u_1 v_1)^3} = 2x(2+\sqrt{6}) + \frac{4}{x(2+\sqrt{6})}$$
$$= \frac{2x^2(2+\sqrt{6})^2 + 4}{x(2+\sqrt{6})}.$$

$A_1 + B_1 = 0.$

Diese Gleichung giebt:

$$\frac{(2+\sqrt{6})^4 - 4x^4}{2(2+\sqrt{6})^2 x^2} + \frac{2x^2(2+\sqrt{6})^2 + 4}{x(2+\sqrt{6})} = 0$$

oder

$$(2+\sqrt{6})^4 - 4x^4 + 4x^3(2+\sqrt{6})^3 + 8x(2+\sqrt{6}) = 0;$$

d. h.

$$4x^4 - 4x^3(44 + 18\sqrt{6}) - 8x(2+\sqrt{6}) - (196 + 80\sqrt{6}) = 0$$

oder

$$x^4 - 44x^3 - 4x - 49 = \sqrt{6}\,(18x^3 + 2x + 20)$$
$$= 2\sqrt{6}\,(9x^3 + x + 10).$$

Hierin können wir beide Seiten durch den fremden Faktor $x + 1$ heben und erhalten:

$$x^3 - 45x^2 + 45x - 49 = 2\sqrt{6}\,(9x^2 - 9x + 10).$$

Wir erheben jetzt auf beiden Seiten ins Quadrat und erhalten somit:

$$x^6 - 90x^5 + 2115x^4 - 4148x^3 + 6435x^2 - 4410x + 2401$$
$$= 24(81x^4 - 162x^3 + 261x^2 - 180x + 100)$$

oder

$$x^6 - 90x^5 + 171x^4 - 260x^3 + 171x^2 - 90x + 1 = 0.$$

Dieses ist zunächst die gesuchte Klassengleichung sechsten Grades und die zur Hauptklasse (1, 0, 162) gehörende Klasseninvariante ist

$$x = \frac{f_1(\sqrt{-162})^3}{\sqrt[4]{8}}.$$

Die zur Determinante -162 gehörenden Formenklassen werden durch folgende reduzierte Formen repräsentiert:

$$\psi_1 = (1, 0, 162), \quad \psi_2 = (9, 3, 19), \quad \psi_3 = (9, -3, 19),$$

welche zum Hauptgeschlecht gehören und

$$\psi_4 = (2, 0, 81), \quad \psi_5 = (11, 5, 17) \quad \text{und} \quad \psi_6 = (11, -5, 17).$$

Unter diesen ist ψ_4 der Repräsentant einer ambigen Klasse. Komponieren wir dieselbe mit ψ_2, so erhalten wir (18, -6, 11),

eine Form, welche äquivalent ist mit $\psi_6 = (11, -5, 17)$. Ebenso folgt durch Komposition $\psi_3 \psi_4 = (18, 6, 11)$, welche äquivalent ist mit $\psi_5 = (11, 5, 17)$. Wenn wir endlich die durch ψ_2 repräsentierte Formenklasse mit sich selbst komponieren, so erhalten wir die durch ψ_3 repräsentierte Formenklasse. Bezeichnen wir daher wieder die zu den durch ψ_1, ψ_2 und ψ_4 repräsentierten Klassen gehörigen Invarianten bezw. mit x, (s) und (l), so haben wir die Perioden:

$$\eta_0 = x + (l),$$
$$\eta_1 = (s) + (ls),$$
$$\eta_2 = (s^2) + (ls^2),$$

welche die Wurzeln der Teilgleichung dritten Grades sind. Da nun die Form (2, 0, 81) vermöge der Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent ist mit (81, 0, 2) und letztere eine Form ist, deren mittlerer Koëffizient $\equiv 0 \pmod 8$ ist, so ist, wenn mit ω ihre Wurzel bezeichnet wird, die Invariante:

$$(l) = \frac{f_1(\omega)^3}{\sqrt[4]{8}} = \frac{f_2\left(\frac{\sqrt{-162}}{2}\right)^3}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{8} f_1(\sqrt{-162})^3} = \frac{\sqrt[4]{8}}{f_1(\sqrt{-162})^3} = \frac{1}{x}$$

nach den Transformationsformeln (3) und (1). Daher ist die Periode $\eta_0 = x + \frac{1}{x}$ eine Wurzel der gesuchten Teilgleichung. In der That läfst sich die Klassengleichung in der Form schreiben:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 90\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 168\left(x + \frac{1}{x}\right) - 80 = 0.$$

Die Diskriminante hat den Wert:

$$D = -4 \cdot 168^2 - 27 \cdot 80^2 + 18 \cdot 90 \cdot 168 \cdot 80 + 90^2 \cdot 168^2 - 4 \cdot 90^3 \cdot 80$$
$$= -162 \cdot 288^2 = -2(5^2 \cdot 9^2)^2.$$

Man vermag in diesem Falle, die Perioden η_1 und η_2 durch $x + \frac{1}{x}$ mit Hilfe der Koëffizienten und $\sqrt{-2}$ rational auszudrücken.

Beispiel 5: $m = 54 \equiv 6 \pmod 8$.

Wir setzen:

$$u_1^6 = f_1(\sqrt{-6})^6 = 2(2 + \sqrt{3});$$
$$v_1^6 = f_1(3\sqrt{-6})^6 = f_1(\sqrt{-54})^6 = 2\sqrt{2} \cdot x$$

und wenden die Schläflischen Modulargleichungen für den dritten Transformationsgrad an:

$$A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6 = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\,x} - \frac{\sqrt{2}\,.\,x}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2x} - \frac{2x}{2\sqrt{2}+2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{x} - \frac{x}{1+\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}-x^2}{x(1+\sqrt{2})},$$

$$B_1 = (u_1 v_1)^3 + \frac{8}{(u_1 v_1)^3} = 2\sqrt{2+2\sqrt{2}}\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})\,x+4}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}\sqrt{x}} = \frac{2\,(2+\sqrt{2})\,x+2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}}.$$

Die Gleichung $A_1 + B_1 = 0$ giebt:

$$\frac{3+2\sqrt{2}-x^2+2\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}\,[(2+\sqrt{2})\,x+\sqrt{2}]}{x\,(1+\sqrt{2})} = 0$$

oder

$$x^2 - (3+2\sqrt{2}) = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}\,[\sqrt{2}+x\,(2+\sqrt{2})].$$

Wir quadrieren auf beiden Seiten und erhalten:

$$x^4 - (6+4\sqrt{2})\,x^2 + 17 + 12\sqrt{2}$$
$$= 4\,(1+\sqrt{2})\,x\,[2+(6+4\sqrt{2})\,x^2 + 2\,(2+2\sqrt{2})\,x],$$

woraus sich weiter ergiebt:

$$x^4 - 8\,[7+5\sqrt{2})\,x^3 - (6+4\sqrt{2}+16\,(3+2\sqrt{2})]\,x^2$$
$$- 8\,(1+\sqrt{2})\,x + 17 + 12\sqrt{2} = 0$$

oder

$$x^4 - 56x^3 - 54x^2 - 8x + 17 = \sqrt{2}\,(40x^3+36x^2+8x-12)$$
$$= 4\sqrt{2}\,(10x^3+9x^2+2x-3).$$

Erheben wir nochmals auf beiden Seiten ins Quadrat, so folgt:

$$x^8 - 112x^7 + 3028x^6 + 6032x^5 + 3846x^4 - 1040x^3 - 1772x^2$$
$$-272x+289 = 32(100x^6+180x^5+121x^4-24x^3-50x^2-12x+9)$$

oder

$$x^8 - 112x^7 - 172x^6 + 272x^5 - 26x^4 - 272x^3 - 172x^2$$
$$+ 112x + 1 = 0.$$

Heben wir aus dieser Gleichung den noch fremden Teiler zweiten Grades $x^2 + 2x - 1$ fort, so bleibt die Klassengleichung sechsten Grades zurück:

$$x^6 - 114x^5 + 57x^4 + 44x^3 - 57x^2 - 114x - 1 = 0.$$

Die zur Hauptklasse (1, 0, 54) gehörende Klasseninvariante ist

$$x = \frac{f_1(\sqrt{-54})^6}{\sqrt{8}};$$

Die Klassengleichung läfst sich leicht in die Periodengleichung verwandeln:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 - 114\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 60\left(x - \frac{1}{x}\right) - 184 = 0,$$

deren Diskriminante sich ergiebt als

$$D = -4 . 60^3 - 27 \cdot 184^2 + 18 . 114 . 60 . 184 + 114^2 . 60^2$$
$$- 4 . 114^3 . 184 = -54 (4 . 1088)^2 = -6 (2^8 . 3 . 17)^2.$$

Somit bestätigt sich, was wir im allgemeinen über die Diskriminante gesagt haben.

Die übrigen Betrachtungen sind den in den letzten Beispielen durchgeführten vollständig analog und können kurz angedeutet werden. Die drei Perioden lassen sich rational durch die eine $x - \frac{1}{x}$ ausdrücken, wenn wir $\sqrt{-6}$ dem Rationalitätsbereich adjungieren; sie sind:

$$\eta_0 = x - \frac{1}{x},$$

$$\eta_1 = (s) - \frac{1}{(s)}$$

und

$$\eta_2 = (s^2) - \frac{1}{(s^2)}.$$

Die sechs Invarianten $x, -\frac{1}{x}, (s), -\frac{1}{(s)}, (s^2), -\frac{1}{(s^2)}$ gehören zu den sechs Klassen erster Art der Determinante -54, welche durch folgende reduzierte Formen repräsentiert werden:

$$\psi_1 = (1, 0, 54), \qquad \psi_4 = (2, 0, 27),$$
$$\psi_2 = (7, 3, 9), \qquad \psi_5 = (5, -1, 11),$$
$$\psi_4 = (7, -3, 9), \qquad \psi_6 = (5, 1, 11).$$

Blicken wir nun noch einmal auf die bisher behandelten Beispiele $m = 26, 29, 38, 50, 81, 121, 169, 162, 54$ zurück, so



zeigt sich, dafs wir in den meisten Fällen die Periode $x + \frac{1}{x}$ oder $x - \frac{1}{x}$ haben. Es rührt dies daher, dafs wir alsdann für x eine solche Invariante genommen haben, dafs x (nach Weber, §. 114) nicht nur eine ganze algebraische Zahl ist, sondern auch eine Einheit; alsdann ist aber auch $\frac{1}{x}$ eine algebraische Einheit und folglich auch $x - \frac{1}{x}$ oder $x + \frac{1}{x}$ eine ganze algebraische Zahl. Es braucht nun aber die Invariante nicht in dieser Weise gewählt zu werden. Dann werden wir aber auch andere Perioden erhalten. Um dieses zu zeigen, haben wir das Beispiel $m = 121$ behandelt. Hier war die Invariante

$$x = \sqrt[4]{2}\, f(\sqrt{-121}),$$

also keine algebraische Einheit; infolgedessen war auch die Periode $x - \frac{2}{x}$. Meistens wird es natürlich am einfachsten sein, wenn wir x so wählen, dafs es eine algebraische Einheit ist; dann lassen sich auch die verschiedenen Fälle nach demselben Schema behandeln. Weiter wollen wir noch erwähnen, dafs sich bei allen behandelten Beispielen das absolute Glied der Teilgleichung als negativ ergiebt und zwar fast immer als eine Potenz von 2; nach den letzten drei Beispielen kann allerdings auch ein einfacher Primfaktor hinzutreten.

Ehe wir nun noch ein Beispiel nach der anderen Methode ausführlich behandeln, wollen wir einige allgemeine Betrachtungen anstellen, um dann nach ein und demselben Schema alle hier noch hergehörigen Beispiele ausführen zu können.

Es handelt sich noch um Determinanten, für welche $m \equiv 2, 5, 6 \pmod 8$ ist.

1) In den noch nicht behandelten Fällen $m \equiv 2 \pmod 8$ — es sind dieses $m = 106, 202, 298$ — ist zugleich $\frac{m}{2} \equiv 5 \pmod 8$. Aufser der Hauptklasse mit dem Repräsentanten $(1, 0, m)$, für welche (nach Weber, §. 94, I. und VII.) $\frac{f_1(\sqrt{-m})^2}{\sqrt{2}}$ Klassen-

invariante ist, existiert noch eine ambige Klasse mit dem Repräsentanten $\left(2, 0, \frac{m}{2}\right)$. Letztere Form ist äquivalent mit

$$\left(\frac{m}{2}, \frac{3m}{2}, \frac{9m}{2} + 2\right)$$

vermöge der Substitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Ist ω die Wurzel der letzten Form, so ist

$$f(\omega)^8 = -f_2\left(\frac{\sqrt{-m}}{2}\right)^8$$

(Transformationsformel 5) Invariante der ambigen Form.

Anderseits ist $\left(2, 0, \frac{m}{2}\right)$ äquivalent mit $\left(\frac{m}{2}, 0, 2\right)$ vermöge der Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und folglich auch, wenn ω die Wurzel der letzten Form ist

$$\sqrt{2}\, f_1(\omega)^6 = \sqrt{2}\, f_2\left(\frac{\sqrt{-m}}{2}\right)^6$$

(Transformationsformel 3)

Invariante. Daher ist auch (mit Anwendung der Formel 1):

$$\frac{-f_2\left(\frac{\sqrt{-m}}{2}\right)^2}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}\, f_1(\sqrt{-m})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{f_1(\sqrt{-m})^2},$$

Invariante der ambigen Klasse.

Ist daher x die Invariante der Hauptklasse, so wird die Klassengleichung sechsten Grades in eine Teilgleichung dritten Grades zu verwandeln sein, welche die Wurzel $x - \frac{1}{x}$ hat. Man vergleiche hierzu das Beispiel $m = 26$.

2) In den noch nicht behandelten Fällen $m \equiv 5 \pmod 8$ ist $\frac{m-1}{2} \equiv 2$ oder $\equiv -2 \pmod 8$. Nach Weber, §. 94, I. u. III., ist die Klasseninvariante der Hauptklasse $\frac{f(\sqrt{-m})^4}{2}$. Aufserdem existiert eine ambige Klasse mit dem Repräsentanten $\left(2, 1, \frac{m+1}{2}\right)$, welche äquivalent ist mit

$$\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}\right).$$

Für diese Form ergiebt sich bei Anwendung unserer Transformationsformeln

$$-\frac{1}{2}f\left(\frac{1+\sqrt{-m}}{1-\sqrt{-m}}\right)^4 = -\frac{4}{2f(\sqrt{-m})^4} = -\frac{2}{f(\sqrt{-m})^4}$$

als Klasseninvariante. Ist daher

$$x = \frac{f(\sqrt{-m})^4}{2}$$

die Invariante der Hauptklasse, so wird die Klassengleichung sechsten Grades in eine Teilgleichung dritten Grades zu verwandeln sein, welche die Wurzel $x - \frac{1}{x}$ hat. Man vergleiche hierzu das Beispiel $m = 29$.

3) Für die Determinanten $m \equiv 6 \pmod 8$, welche hier in Frage kommen — es sind dieses $m = 118, 214, 262, 358$ —, ist zugleich $\frac{m}{2} \equiv 3 \pmod 8$. Es ergiebt sich durch dieselbe Überlegung wie beim ersten Falle, dafs, wenn die Invariante der Hauptklasse $\frac{f_1(\sqrt{-m})^2}{\sqrt{2}}$ mit x bezeichnet wird, $-\frac{1}{x}$ die Invariante der ambigen Klasse mit dem Repräsentanten $\left(2, 0, \frac{m}{2}\right)$ ist und die gesuchte Teilgleichung daher eine Gleichung dritten Grades von $x - \frac{1}{x}$ ist. Man vergleiche hierzu das Beispiel $m = 38$.

Um nun die Methode, nach der wir alle noch vorhandenen Fälle behandeln können, etwas ausführlicher auseinander zu setzen, behandeln wir eingehender das

B e i s p i e l 6: $m = 106 \equiv 2 \pmod 8$.

Als Repräsentanten der sechs zur Determinante -106 gehörigen Formenklassen k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 und k_6 wählen wir die folgenden bezw. reduzierten Formen:

$\psi_1 = (1, 0, 106)$, $\psi_2 = (10, 2, 11)$, $\psi_3 = (10, -2, 11)$,

welche zum Hauptgeschlecht gehören und

$\psi_4 = (2, 0, 53)$, $\psi_5 = (5, 2, 22)$ und $\psi_6 = (5, -2, 22)$.

Komponieren wir die ambige Klasse k_4 mit der Klasse k_2, so erhalten wir die Klasse k_5; ebenso ergiebt sich durch Komposition von k_4 mit der Klasse k_3 die Klasse k_6. Da ferner die

Klasse k_2 mit sich selbst komponiert die Klasse k_3 ergiebt, so sind, wenn die Invarianten der Klassen k_1, k_2, k_4 bezw. mit x, (s) und (l) bezeichnet werden

$$\eta_0 = x + (l) = x - \frac{1}{x},$$

$$\eta_1 = (s) + (ls) = x_1 - \frac{1}{x_1},$$

$$\eta_2 = (s^2) + (ls^2) = x_2 - \frac{1}{x^2},$$

die Wurzeln der gesuchten Teilgleichung:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + a\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Es ist nun die Form $\psi_2 = (10, 2, 11)$ äquivalent mit $(11, 9, 17)$ vermöge der Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Ist ω die Wurzel der letzten Form, so ist Klasseninvariante:

$$f(\omega)^8 = e^{\frac{16\pi i}{3}} \cdot e^{3\pi i} f_2\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{10}\right)^8 = e^{\frac{\pi i}{3}} f_2\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{10}\right)^8.$$

(Transformationsformel 5.)

Anderseits ist $(10, 2, 11)$ äquivalent mit $(11, 64, 382)$ vermöge der Substitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$. Daher ist auch, wenn ω die Wurzel der letzten Form ist, Klasseninvariante

$$\sqrt{2}\, f_1(\omega)^6 = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{9\pi i}{4} \cdot -6} f_2\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{10}\right)^6$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi i}{2}} f_2\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{10}\right)^6.$$

(Transformationsformel 3.)

Somit ist die Klasseninvariante

$$(s) = x_1 = \frac{e^{\frac{5\pi i}{6}} f_2\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{10}\right)^2}{\sqrt{2}} = \frac{e^{\frac{5\pi i}{6}}\sqrt{2}}{f_1\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2}.$$

(Transformationsformel 1.)

Ferner ist die Form $\psi_3 = (10, -3, 11)$ äquivalent mit $(11, -9, 17)$ vermöge der Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Daher ist, wenn ω die Wurzel der letzten Form ist, Klasseninvariante

$$f(\omega)^8 = e^{-\frac{16\pi i}{3}} e^{-3\pi i} f_2\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{10}\right)^8 = e^{-\frac{\pi i}{3}} f_2\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{10}\right)^8.$$

(Transformationsformel 5.)

Anderseits ist (10, — 2, 11) äquivalent mit (11, — 64, 382) vermöge der Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. Daher ist auch Klasseninvariante

$$\sqrt{2} \, . \, f_1(\omega)^6 = \sqrt{2} \, . \, e^{-\frac{9\pi i}{4} \cdot 6} f_2\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{10}\right)^6$$

$$= \sqrt{2} \, . \, e^{\frac{\pi i}{2}} f_2\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{10}\right)^6.$$

(Transformationsformel 3.)

Somit ist die Klasseninvariante

$$(s^2) = x_2 = \frac{e^{-\frac{5\pi i}{6}} f_2\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{10}\right)^2}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-\frac{5\pi i}{6}} \sqrt{2}}{f_1\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2}.$$

(Transformationsformel 1.)

Es ergiebt sich also für den Koëffizienten $-a$ unserer gesuchten Teilgleichung die Summe der Wurzeln:

$$-a = \left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)$$

$$= \left(\frac{f_1(\sqrt{-106})^6}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{f_1(\sqrt{-106})^2}\right)$$

$$+ \left(\frac{e^{\frac{5\pi i}{6}} \sqrt{2}}{f_1\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2} - \frac{f_1\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2}{e^{\frac{5\pi i}{6}} \sqrt{2}}\right)$$

$$+ \left(\frac{e^{-\frac{5\pi i}{6}} \sqrt{2}}{f_1\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2} - \frac{f_1\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2}{\sqrt{2}\, e^{-\frac{5\pi i}{6}}}\right).$$

Für den Koëffizienten $-c$ unserer Gleichung erhalten wir das Produkt der Wurzeln:

$$-c = \left(x - \frac{1}{x}\right)\cdot\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)$$

$$= \left(\frac{f_1\,(\sqrt{-106})^2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{f_1\,(\sqrt{-106})^2}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{e^{\frac{5\pi i}{6}}\sqrt{2}}{f_1\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2} - \frac{f_1\left(\frac{-2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2}{e^{\frac{5\pi i}{6}}\sqrt{2}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{e^{-\frac{5\pi i}{6}}\sqrt{2}}{f_1\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2} - \frac{f_1\left(\frac{2+\sqrt{-106}}{5}\right)^2}{\sqrt{2}\,.\,e^{-\frac{5\pi i}{6}}}\right).$$

Wir wenden jetzt die Näherungsformel an:

$$f_1(\omega) = e^{-\frac{\pi i \omega}{24}}$$

und erhalten:

$$-a = \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{e^{-\frac{4\pi i}{5}}\,e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}} - \frac{e^{-\frac{4\pi i}{5}}\,e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{4\pi i}{5}}\,e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}} - \frac{e^{\frac{4\pi i}{5}}\,e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}} - \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(e^{\frac{4\pi i}{5}} + e^{-\frac{4\pi i}{5}}\right)$$

oder

$$-a = \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}} - \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}}{\sqrt{2}}\right)\cdot 2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Ferner:

$$-c = \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{e^{-\frac{4\pi i}{5}}\,e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}} - \frac{e^{-\frac{4\pi i}{5}}\,e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{4\pi i}{5}}\,e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}} - \frac{e^{\frac{4\pi i}{5}}\,e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{60}}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{2}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{30}}}+\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{30}}}{2}-\left(e^{\frac{8\pi i}{5}}+e^{-\frac{8\pi i}{5}}\right)\right]=\left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{12}}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{30}}}{\sqrt{2}}+\frac{2}{e^{\frac{\pi\sqrt{106}}{30}}}+-\,2\cos\frac{8\pi}{5}\right).$$

Mit Benutzung 10stelliger Logarithmentafeln erhalten wir:

$-a=(10{,}473162-0{,}095482)+(0{,}82476-1{,}21247)\,.\,2\cos\frac{4\pi}{5}$

$=10{,}377680+0{,}38771\,.\,1{,}61803=11$ (in grofser Annäherung).

$-c=10{,}377680\,.\,(0{,}680229+1{,}470084-0{,}618034)$

$=10{,}377680\,.\,1{,}532277=16$ (in grofser Annäherung).

In der That ergiebt sich bei Benutzung der Werte:

$$x-\frac{1}{x}=10{,}377680,$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=107{,}696243,$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=1117{,}637137,$$

in sehr grofser Annäherung:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3-11\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+8\left(x-\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

Dieses ist also die gesuchte Teilgleichung dritten Grades. Zur Bestätigung berechnen wir noch die Diskriminante:

$D=-4.8^3-27.16^2+18.11.8.16+11^2.8^2-4.11^3.16$

$=-106\,.\,24^2.$

Die drei Wurzeln der Gleichung lassen sich also rational durch eine ausdrücken, wenn wir $i\,.\,\sqrt{106}$ dem Rationalitätsbereich adjungieren. Auch in der bei diesem Beispiel erhaltenen Gleichung gilt für den Koëffizienten c dasfelbe, was wir vorhin angegeben haben. Daher sind wir vielleicht zu dem Induktionsschlufs berechtigt: In der Periodengleichung dritten Grades ist das absolute Glied negativ und ein Multiplum einer Potenz von 2.

Nach dem Muster des letzten Beispiels können wir nun noch sämtliche hierher gehörigen Fälle behandeln. Da uns aber hier-

bei keine neuen Thatsachen begegnen, so begnügen wir uns mit diesem Beispiel $m = 106$, um nun zum Schlufs unserer Betrachtungen noch an einem Beispiel zu zeigen, wie die Bildung der Periodengleichung aus der Klassengleichung auch für höhere als dem sechsten Grade möglich ist.

IV.

Unter den negativen Determinanten, für welche acht Formenklassen erster Art vorhanden sind, die zwei Geschlechter bilden, wählen wir nach der Gaufsschen Tabelle:

$$\underline{m = 98 \equiv 2 \pmod 8}.$$

Nach unseren allgemeinen Betrachtungen (S. 12) wissen wir, dafs für diese Determinante eine ambige Klasse existiert und dafs wir daher aus den Klasseninvarianten einfache Perioden bilden können, welche Wurzeln einer Gleichung vierten Grades sind. Die acht Formenklassen k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7 und k_8 der Determinante -98 können bezw. durch folgende reduzierte Formen repräsentiert werden:

$\psi_1 = (1, 0, 98)$, $\psi_2 = (2, 0, 49)$, $\psi_3 = (9, 1, 11)$, $\psi_4 = (9, -1, 11)$, welche zum Hauptgeschlecht gehören und

$\psi_5 = (3, 1, 33)$, $\psi_6 = (3, -1, 33)$, $\psi_7 = (6, 2, 17)$, und $\psi_8 = (6, -2, 17)$.

Unter ihnen ist ψ_2 der Vertreter einer ambigen Klasse k_2. Die Komposition dieser Klasse mit den übrigen ist nun sehr leicht, wie wir an einem Beispiele ausführen wollen. Um die Klasse k_2 mit der Klasse k_5 zu komponieren, setzen wir die zugehörigen reduzierten Formen zusammen:

$$\psi_2 \,.\, \psi_5 = (2, 0, 49) \,.\, (3, 1, 33) = (6, 4, 19)$$

äquivalent mit $\psi_8 = (6, -2, 17)$. Daher ist

$$k_2 \,.\, k_5 = k_8.$$

Genau so folgt:

$$k_2 \,.\, k_3 = k_4$$

und

$$k_2 \,.\, k_7 = k_6.$$

Ferner ergiebt sich:

$(k_5)^2 = k_3$ durch Komposition von $(3, 1, 33) \,.\, (3, 1, 33)$,
$(k_5)^3 = k_7$ „ „ „ $(3, 1, 33) \,.\, (11, -1, 9)$,
$(k_5)^4 = k_1$ „ „ „ $(9, 1, 11) \,.\, (9, 1, 11)$.

Wir ordnen daher die zu den Klassen gehörigen Invarianten in folgender Weise an:

$$\eta_0 = (k_1) + (k_2),$$
$$\eta_1 = (k_5) + (k_8),$$
$$\eta_2 = (k_3) + (k_4)$$

und

$$\eta_3 = (k_7) + (k_6).$$

In diesen Perioden ist je der zweite Summand rein rational durch den ersten ausdrückbar und jede folgende Periode nach Adjunktion von $\sqrt{-98}$ oder $\sqrt{-2}$ dieselbe rationale Funktion der vorhergehenden wie die erste von der letzten. Daher sind nach unseren allgemeinen Betrachtungen diese Perioden die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung mit ganzen rationalen Koëffizienten. Um diese zu finden, bestimmen wir zunächst wieder nach unserer ersten Methode die Klassengleichung.

Wir setzen:

$$u_1 = f_1(\sqrt{-2}) = \sqrt[4]{2},$$
$$v_1 = f_1(7\sqrt{-2}) = f_1(\sqrt{-98}) = \frac{x}{\sqrt[4]{2}},$$

und wenden die Schläflischen Modulargleichungen für den siebenten Transformationsgrad an:

$$A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^4 + \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^4 = \frac{4}{x^4} + \frac{x^4}{4} = \frac{16 + x^8}{4\,x^4},$$

$$B_1 = (u_1 v_1)^3 + \frac{8}{(u_1 v_1)^3} = x^3 + \frac{8}{x^3} = \frac{4\,x^7 + 32\,x}{4\,x^4}.$$

$$A_1 - B_1 - 7 = 0.$$

Diese Gleichung liefert:

$$\frac{16 + x^8}{4\,x^4} - \frac{4\,x^7 + 32\,x}{4\,x^4} - 7 = 0$$

oder

$$x^8 - 4\,x^7 - 28\,x^4 - 32\,x + 16 = 0.$$

Dieses ist die sehr einfache Klassengleichung achten Grades, in der $x = \sqrt[4]{2}\,f_1(\sqrt{-98})$ die Invariante der Hauptklasse k_1 ist. Die Invariante der ambigen Klasse k_2 ist hiernach:

$$(k_2) = \sqrt[4]{2}\,.\,f_2\left(\frac{\sqrt{-98}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}\,\sqrt{2}}{f_1(\sqrt{-98})} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}\,f_1(\sqrt{-98})} = \frac{2}{x}.$$

(Nach den Transformationsformeln 3 und 1.)

Daher ist die Periode $\eta_0 = x + \frac{2}{x}$. In der That läfst sich die Klassengleichung in der Form schreiben:

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^4 - 4\left(x + \frac{2}{x}\right)^3 - 8\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 24\left(x + \frac{2}{x}\right) - 20 = 0.$$

Auch diese Gleichung ist sehr einfach gebaut, und was das absolute Glied anbetrifft, so scheint hier dieselbe Regel wie bei den Teilgleichungen dritten Grades zu gelten.

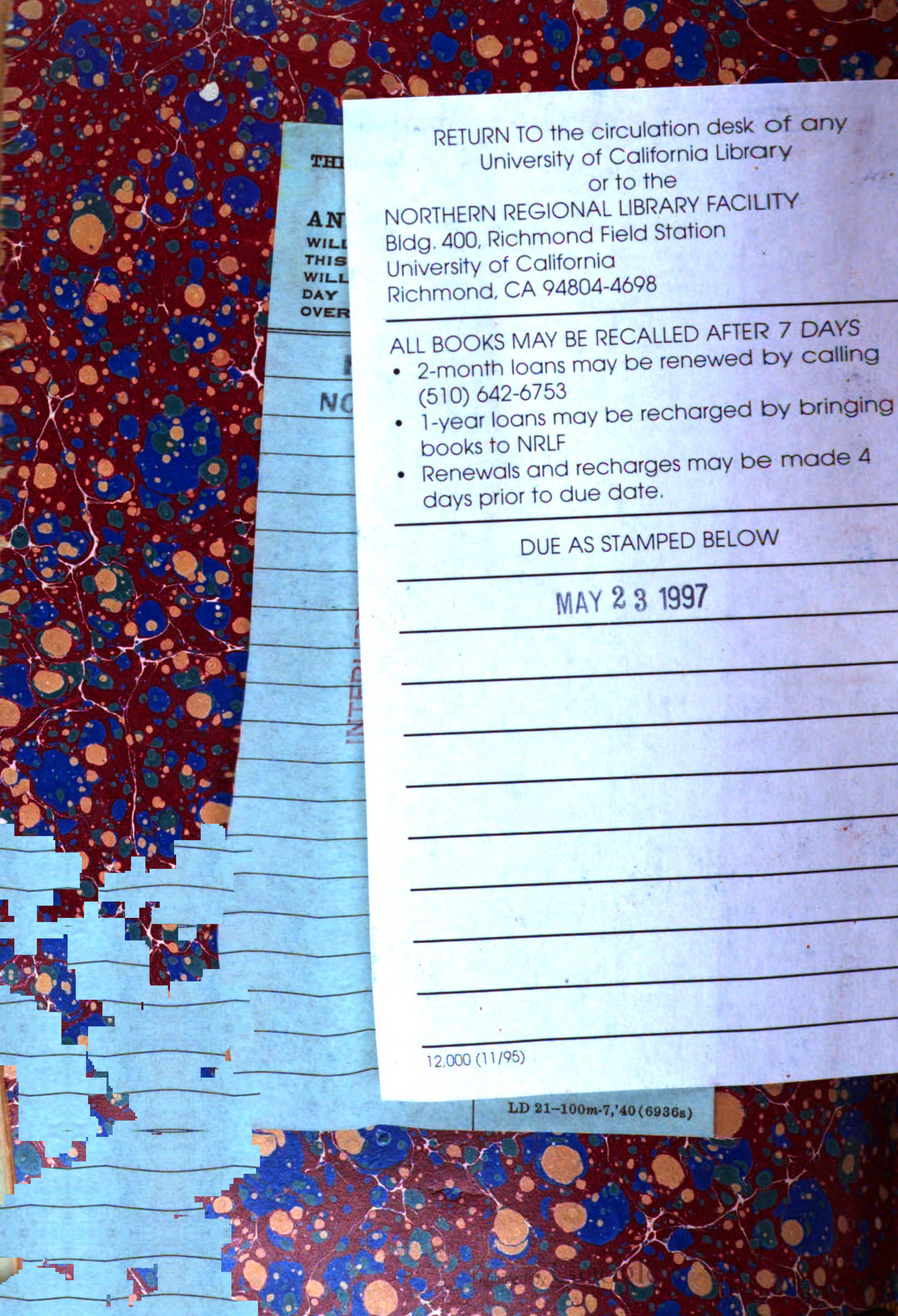
Es ist nun nicht schwer, unsere Betrachtungen in der angegebenen Weise beliebig weit fortzusetzen und auf Klassengleichungen höherer Grade anzuwenden. In allen Fällen, in denen eine ambige Klasse erster Art existiert mit Formen mit dem ersten Koëffizienten 2 — und diese Fälle sind auf S. 12 näher bezeichnet — lassen sich solche einfachen Periodengleichungen — nach Adjunktion einer Quadratwurzel Abelsche Gleichungen — bilden. Diejenigen Fälle, in denen keine ambige Klasse erster Art vorhanden ist, oder bei denen wir eine andere Periodenbildung vornehmen, haben kein so grofses Interesse für uns, da die Summanden der einzelnen Perioden nicht rein rationale Funktionen des ersten Gliedes sind.

Lebenslauf.

Ich, Georg Adolf Wilhelm Knoche, wurde geboren zu Gr. Heere (Reg.-Bez. Hildesheim) am 27. Mai 1863. Bis zum 12. Jahre wurde ich von meinem Vater in der Volksschule unterrichtet und Mich. 1875 in die Quarta des Realgymnasiums in Hildesheim aufgenommen. Nachdem ich Ostern 1882 an dieser Anstalt die Reifeprüfung bestanden, studierte ich bis Mich. 1885 in Göttingen Mathematik und Naturwissenschaften. Von Mich. 1886 bis dahin 1887 absolvierte ich das pädagogische Probejahr in Ülzen und leitete dann bis 1890 die höhere Knabenschule in Freden a. L. Um meine Studien zu vollenden, bezog ich jetzt die Universität Marburg, wo ich am 3. März 1892 das Examen rigorosum bestand.

Ich besuchte in Marburg die Vorlesungen der Herren Dozenten: Elsas, Plate, Greeff, Kayser, Feussner, Hess, Melde, Fischer und Weber. Den letzteren, insbesondere Herrn Prof. Weber, spreche ich auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus für die freundliche Förderung meiner Studien.

Druck und Papier
von
Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.



RETURN TO the circulation desk of any
University of California Library
or to the
NORTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY
Bldg. 400, Richmond Field Station
University of California
Richmond, CA 94804-4698
ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS
• 2-month loans may be renewed by calling (510) 642-6753
• 1-year loans may be recharged by bringing books to NRLF
• Renewals and recharges may be made 4 days prior to due date.
DUE AS STAMPED BELOW
MAY 23 1997
12,000 (11/95)
LD 21-100m-7,'40(6936s)

